

# FORMULARIO

sintetico di:  
 Geodesia,  
 Cartografia,  
 Topografia,  
 Telerilevamento,  
 Fotogrammetria  
 e Teoria degli errori,  
 con alcuni dati  
 e formule utili.

## GEODESIA

### COSTANTI DEGLI ELLISSOIDI PIÙ USATI

#### INTERNAZIONALE (Hayford)

Semiassse maggiore	$a = 6\,378\,388\text{ m}$
Semiassse minore	$b = 6\,356\,911.9461\text{ m}$
Raggio di curv. polare	$c = \frac{a^2}{b} = 6\,399\,936.6081\text{ m}$
Schiacciamento	$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{297} = 3.367003367 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità prima	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8.199188998 \cdot 10^{-2}$ $e^2 = 6.722670022 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità seconda	$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}} = 8.226888961 \cdot 10^{-2}$ $(e')^2 = 6.768170197 \cdot 10^{-3}$

#### BESSEL (1841)

Semiassse maggiore	$a = 6\,377\,397.155\text{ m}$
Semiassse minore	$b = 6\,356\,078.9628\text{ m}$
Raggio di curv. polare	$c = \frac{a^2}{b} = 6\,398\,786.8481\text{ m}$

Schiacciamento  $f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{299.1528128} = 3.342773182 \cdot 10^{-3}$

Eccentricità prima  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8.169683122 \cdot 10^{-2}$   
 $e^2 = 6.674372232 \cdot 10^{-3}$

Eccentricità seconda  $e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}} = 8.197084115 \cdot 10^{-2}$   
 $(e')^2 = 6.719218799 \cdot 10^{-3}$

#### WGS 84

Semiassse maggiore	$a = 6\,378\,137\text{ m}$
Semiassse minore	$b = 6\,356\,752.3142\text{ m}$
Raggio di curv. polare	$c = \frac{a^2}{b} = 6\,399\,593.6258\text{ m}$
Schiacciamento	$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.257223563} = 3.352810665 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità prima	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8.181919084 \cdot 10^{-2}$ $e^2 = 6.694379990 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità seconda	$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}} = 8.209443795 \cdot 10^{-2}$ $(e')^2 = 6.739496742 \cdot 10^{-3}$

#### GRS 80

Semiassse maggiore	$a = 6\,378\,137\text{ m}$
Semiassse minore	$b = 6\,356\,752.3141\text{ m}$
Raggio di curv. polare	$c = \frac{a^2}{b} = 6\,399\,593.6259\text{ m}$
Schiacciamento	$f = \frac{a-b}{a} = \frac{1}{298.257222101} = 3.352810681 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità prima	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 8.181919104 \cdot 10^{-2}$ $e^2 = 6.694380023 \cdot 10^{-3}$
Eccentricità seconda	$e' = \sqrt{\frac{e^2}{1-e^2}} = 8.209443815 \cdot 10^{-2}$ $(e')^2 = 6.739496775 \cdot 10^{-3}$

#### ALTRI ELLISSOIDI

	a	f
Australia (1965)	6 378 160	1/298.25
Clarke (1866)	6 378 206.4	1/294.9786982
Clarke (1880)	6 378 249.145	1/293.465
Helmert (1906)	6 378 200	1/298.3
GRS67	6 378 160	1/298.247167427
WGS72	6 378 135	1/298.26

## PARAMETRI ELLISSOIDICI

$$W = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$$

raggio del parallelo  $r = \frac{a \cos \varphi}{W}$

raggio di curvatura della sezione normale meridiana  $\rho = \frac{a(1 - e^2)}{W^3}$

raggio di curvatura della sezione normale del primo verticale (gran normale)  $N = \frac{a}{W}$

raggio sfera media locale  $R = \sqrt{\rho N} = \frac{a \sqrt{1 - e^2}}{W^2}$

raggio di curvatura di una sezione normale di azimut  $\alpha$   $R_\alpha = \frac{\rho N}{N \cos^2 \alpha + \rho \sin^2 \alpha}$

PASSAGGIO DA COORDINATE ELLISSOIDICHE ( $\varphi, \lambda, h$ ) A CARTESIANE ELLISSOCENTRICHE ( $X, Y, Z$ ) E VICEVERSA

$$\begin{cases} X = (N + h) \cos \varphi \cos \lambda & N = \text{gran normale} \\ Y = (N + h) \cos \varphi \sin \lambda & h = \text{quota ellissoidica} \\ Z = [N(1 - e^2) + h] \sin \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi = \arctg \frac{Z + (e^2) b \sin^3 \psi}{P - e^2 a \cos^3 \psi} & b = a \sqrt{1 - e^2} \\ \lambda = \arctg \frac{Y}{X} & P = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ h = \frac{P}{\cos \varphi} - N & \psi = \arctg \frac{Z a}{P b} \end{cases}$$

RAGGIO DELLA SFERA MEDIA LOCALE RELATIVO ALL'ELLIPSOIDE INTERNAZIONALE PER LE LATITUDINI ITALIANE (IN KM)

$\varphi$	R	$\varphi$	R	$\varphi$	R	$\varphi$	R
36°	6 371.7	39°	6 373.9	42°	6 376.1	45°	6 378.4
37°	6 372.4	40°	6 374.6	43°	6 376.9	46°	6 379.1
38°	6 373.2	41°	6 375.4	44°	6 377.6	47°	6 379.9

VALORI IN METRI DI UN SECONDO DI LATITUDINE E LONGITUDINE ALLA LATITUDINE  $\varphi$  SULL'ELLIPSOIDE INTERNAZIONALE

$\varphi$	36°	37°	38°	39°	40°	41°
1" lat.	30.823	30.828	30.833	30.839	30.844	30.850
1" long.	25.047	24.727	24.399	24.064	23.722	23.372

$\varphi$	42°	43°	44°	45°	46°	47°
1" lat.	30.855	30.860	30.866	30.871	30.876	30.882
1" long.	23.015	22.651	22.281	21.903	21.519	21.128

## SISTEMA GEODETICO ITALIANO (ROMA40)

Ellissoide internazionale orientato a Roma M. Mario, definizione astronomica 1940

$$\text{Roma M. Mario} \begin{cases} \varphi = 41^\circ 55' 25.51'' \\ \lambda = 0^\circ (12^\circ 27' 08.4'' \text{ Est da Greenwich}) \\ \text{Azimut su Monte Soratte } \alpha = 6^\circ 35' 00.88'' \end{cases}$$

## SISTEMA GEODETICO EUROPEO (ED50)

Ellissoide Internazionale con orientamento medio europeo

origine delle longitudini: Greenwich = 0°

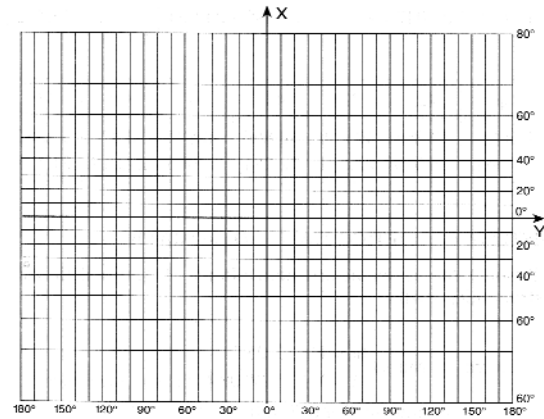
$$\text{Roma M. Mario} \begin{cases} \varphi = 41^\circ 55' 31.487'' \\ \lambda = 12^\circ 27' 10.93'' \end{cases}$$

## RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI MERCATORE

È detta anche «cilindrica diretta» perché l'immagine del reticolo geografico che si ottiene è simile a quella delle proiezioni cilindriche con l'asse del cilindro coincidente con l'asse terrestre. Ha la proprietà di trasformare le linee lissodromie (linee con azimut costante) in rette, e per tale caratteristica è oggi principalmente usata per le carte nautiche e aeronautiche.

### FORMA DEL RETICOLO GEOGRAFICO

- le trasformate dei paralleli sono linee rette parallele;
- le trasformate dei meridiani sono linee rette parallele normali alle trasformate dei paralleli;



### FORMULE DI CORRISPONDENZA

$\varphi, \lambda$  = latitudine, longitudine;  
 $\Delta\lambda$  = (long. del punto) - (long. del meridiano centrale);  
 $x, y$  = coord. nel piano della rappresentazione.

L'asse Y è la trasformata dell'equatore, e l'asse X è la trasformata del meridiano centrale della rappresentazione.

### Dirette

Imponendo come condizione al contorno che l'equatore sia rappresentato in vera grandezza si ha:

$$\begin{cases} x = R \cdot U' & (\text{considerando la Terra} \\ y = R \cdot \lambda \lambda & \text{sferica di raggio } R) \end{cases}$$

con

$$U' = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (\text{lat. crescente sulla sfera})$$

oppure

$$\begin{cases} x = a \cdot U & (\text{considerando la Terra ellissoidica} \\ y = a \cdot \Delta\lambda & \text{di semiass maggiore } a) \end{cases}$$

con

$$U = \ln \left[ \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \left( \frac{1 - e \cdot \sin \varphi}{1 + e \cdot \sin \varphi} \right)^{e/2} \right] \quad (\text{lat. crescente sull'elliss.})$$

Imponendo invece che sia rappresentato in vera grandezza il parallelo di lat.  $\varphi_0$ , nelle formule precedenti si sostituirà rispettivamente ad R:  $r_{\varphi_0} = R \cos \varphi_0$  (sfera); ad a:  $r_{\varphi_0} = N \cos \varphi_0$  (ellissoide) essendo  $r_{\varphi_0}$  il raggio del parallelo in vera grandezza (parallelo standard).

Nelle applicazioni si opera, normalmente, una traslazione degli assi, di quantità  $C_x$  e  $C_y$ , in modo che la zona da rappresentare sia tutta esprimibile con coordinate positive. In tal caso le formule di corrispondenza assumono la forma:

### Dirette

$$\begin{cases} \text{Nord} = x + C_x = R \cdot U' + C_x \\ \text{Est} = y + C_y = R \cdot \Delta\lambda + C_y \end{cases} \quad (\text{per la sfera})$$

$$\begin{cases} \text{Nord} = x + C_x = a \cdot U + C_x \\ \text{Est} = y + C_y = a \cdot \Delta\lambda + C_y \end{cases} \quad (\text{per l'ellissoide})$$

### Inverse

$$\begin{cases} U' = \frac{\text{Nord} - C_x}{R} \\ \Delta\lambda = \frac{\text{Est} - C_y}{R} \end{cases} \quad (\text{per la sfera})$$

$$\begin{cases} U = \frac{\text{Nord} - C_x}{a} \\ \Delta\lambda = \frac{\text{Est} - C_y}{a} \end{cases} \quad (\text{per l'ellissoide})$$

Essendo  $\varepsilon$  il numero di Nepero, la latitudine  $\varphi$  può essere ricavata: per la sfera da  $U'$  con la formula

$$\varphi = 2 \cdot \text{arctg}(\varepsilon^{U'}) - \frac{\pi}{2}$$

per l'ellissoide da  $U$  con un calcolo per approssimazioni successive dalla relazione

$$\varphi = 2 \cdot \text{arctg} \left[ \varepsilon^U \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \frac{\pi}{2}$$

**MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE**

Il modulo di deformazione lineare è indipendente dalla longitudine ed è quindi costante lungo un parallelo. Varia invece notevolmente al variare della latitudine, per cui, anche praticamente, il rapporto di scala può essere considerato valido solo in un intorno del *parallelo standard*.

$$m = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (\text{sfera}) \qquad m = \frac{a}{N \cdot \cos \varphi} \quad (\text{ellissoide})$$

Espressione semplificata in coordinate piane:

$$m = 1 + \frac{x^2}{2R^2} \quad (\text{sfera}) \qquad m = 1 + \frac{x^2}{2\rho N} \quad (\text{ellissoide})$$

Per elementi finiti lungo una geodetica di estremi  $A$  e  $B$

$$M = 1 + \frac{x_A^2 + x_A \cdot x_B + x_B^2}{6R^2} \quad (\text{sfera})$$

$$M = 1 + \frac{x_A^2 + x_A \cdot x_B + x_B^2}{6\rho N} \quad (\text{ellissoide})$$

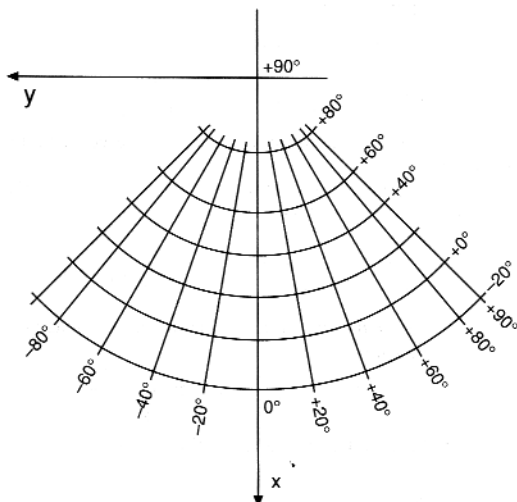
( $\rho$  e  $N$  calcolati alla  $\varphi$  media).

**RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI LAMBERT**

È detta anche «conica» perché genera un reticolato geografico simile a quelle delle proiezioni coniche dirette. Attualmente è impiegata all'IGM per la produzione di cartografia a piccola scala (carta «Il Mondo 1404» al 500000, carta d'Italia al 1250000).

**FORMA DEL RETICOLATO GEOGRAFICO**

- le trasformate dei paralleli sono archi di circonferenze concentriche con il centro nell'origine;
- le trasformate dei meridiani sono rette concorrenti nell'origine e perpendicolari alle immagini dei paralleli perché raggi delle circonferenze.



**FORMULE DI CORRISPONDENZA**

$\varphi, \lambda$  = latitudine, longitudine;  
 $\Delta\lambda$  = (long. del punto) - (long. del meridiano centrale);  
 $x, y$  = coord. nel piano della rappresentazione.

L'origine del sistema di coordinate piane coincide con l'immagine del Polo Nord, l'asse  $x$  è la retta immagine del meridiano centrale ed ha il verso positivo verso Sud, l'asse della  $y$  è ortogonale all'asse  $x$  ed ha il verso positivo verso Ovest.

**Dirette**

$$\begin{cases} x = R_\varphi \cos \Theta \\ y = -R_\varphi \sin \Theta \end{cases}$$

dove, essendo  $\varepsilon$  il numero di Nepero, ed  $U$  la latitudine crescente sull'ellissoide:

$$\Theta = h \cdot \Delta\lambda \quad (\text{angolo fra la retta immagine del meridiano centrale e la retta che rappresenta il meridiano } \Delta\lambda)$$

$$R_\varphi = k\varepsilon^{-hU_\varphi} \quad (\text{raggio della circonferenza immagine del parallelo di latitudine } \varphi)$$

Esplicitando la latitudine crescente:

$$R_\varphi = k \cdot \left[ \text{ctg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right]^h \cdot \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}h}$$

i coefficienti  $h$  e  $k$  caratterizzano i paralleli che conservano la vera grandezza:

- nel caso di un parallelo standard di latitudine  $\varphi_0$ , ed essendo  $r_0$  il raggio di tale parallelo, si ha

$$h = \sin \varphi_0$$

$$k = \frac{r_0 \varepsilon^{hU_0}}{h} = \frac{N_0 \cos \varphi_0 \varepsilon^{U_0 \sin \varphi_0}}{\sin \varphi_0} = N_0 \text{ctg } \varphi_0 \varepsilon^{U_0 \sin \varphi_0}$$

essendo  $N_0 \text{ctg } \varphi_0 = R_0$  (raggio della circonferenza immagine del parallelo standard), ne segue

$$k = R_0 \left[ \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right]^{\sin \varphi_0} \left( \frac{1 - e \sin \varphi_0}{1 + e \sin \varphi_0} \right)^{\frac{e \sin \varphi_0}{2}}$$

- nel caso di due paralleli standard di latitudine  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  si ha

$$h = \frac{\ln \frac{r_1}{r_2}}{U_2 - U_1} \qquad k = \frac{r_2 \varepsilon^{hU_2}}{h}$$

con  $r_1 = N \cos \varphi_1$  ed  $U_1 = \ln \left[ \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \left( \frac{1 - e \sin \varphi_1}{1 + e \sin \varphi_1} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$

ed analoghe espressioni per i simboli di uguale significato.

Nelle applicazioni, di norma, l'origine del sistema piano è posta nel punto d'incontro fra l'immagine del meridiano centrale e quella del parallelo standard (o della media fra i due paralleli standard), l'asse  $x$  è rivolto verso Nord e l'asse  $y$  verso Est, inoltre si introducono false origini ( $C_x, C_y$ ) in modo che la zona da rappresentare sia tutta esprimibile con coordinate positive.

Le formule così modificate assumono la forma:

**Dirette**

$$\begin{cases} \text{Nord} = R_0 - R_\varphi \cos \Theta + C_x \\ \text{Est} = R_\varphi \sin \Theta + C_y \end{cases}$$

**Inverse**

$$\Delta\lambda = \frac{\Theta}{h}$$

dove

$$\Theta = \text{arctg} \frac{\text{Est} - C_y}{R_0 + C_x - \text{Nord}}$$

$$U_\varphi = \ln \left( \frac{k^2}{(R_0 - C_x - \text{Nord})^2 + (\text{Est} - C_y)^2} \right)^{\frac{1}{2h}}$$

La latitudine  $\varphi$  può essere ricavata da  $U_\varphi$  con un calcolo per approssimazioni successive dalla relazione

$$\varphi = 2 \cdot \text{arctg} \left[ \varepsilon^{U_\varphi} \left( \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right] - \frac{\pi}{2}$$

**MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE**

Il modulo di deformazione lineare è indipendente dalla longitudine ed è quindi costante lungo un parallelo

$$m = \frac{hk\varepsilon^{-hU}}{r} = \frac{hR_\varphi}{r}$$

Espressione semplificata in coordinate piane: con  $x = \text{Nord} - C_x$

$$m = 1 + \frac{x^2}{2\rho N}$$

Per elementi finiti (lungo la geodetica di estremi  $A$  e  $B$ )

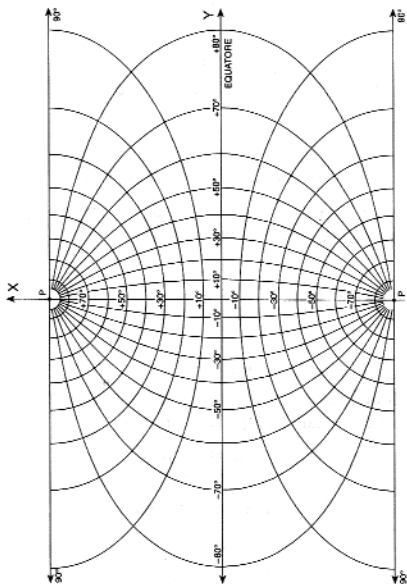
$$M = 1 + \frac{x_A^2 + x_A \cdot x_B + x_B^2}{6\rho N} \quad (\rho \text{ e } N \text{ calcolati alla } \varphi \text{ media})$$

## RAPPRESENTAZIONE CONFORME DI GAUSS

Nei Paesi Anglosassoni viene anche definita «Proiezione di Mercatore Trasversa».

### FORMA DEL RETICOLATO GEOGRAFICO

Le trasformate dei meridiani e dei paralleli sono curve non algebriche; le prime simili a sinusoidi e le seconde ad ellissi (di norma le condizioni al contorno che vengono imposte sono tali che l'Equatore, il meridiano centrale del fuso ed i meridiani +90° e -90° si trasformino in rette).



### FORMULE DI CORRISPONDENZA

$\varphi, \lambda$  = latitudine, longitudine;  
 $\Delta\lambda$  = (long. del punto) - (long. del meridiano centrale del fuso);  
 $x, y$  = coord. nel piano della rappresentazione.

Imponendo le condizioni al contorno in modo che l'Equatore si trasformi in una retta, ed il meridiano centrale del fuso rappresentato si trasformi in un segmento lungo il quale si conservano le distanze, si ha:

**Dirette:**

$$\begin{cases} x = \eta \cdot v (1 + \zeta) + B_\varphi \\ y = \xi \cdot v \left( 1 + \frac{\zeta}{3} \right) \end{cases}$$

dove

$$\zeta = \operatorname{arctg} h (\cos \varphi \cdot \sin \Delta\lambda); \quad \eta = \operatorname{arctg} \frac{\tan \varphi}{\cos \Delta\lambda} - \varphi$$

$$v = \frac{c}{(1 + (e')^2 \cos^2 \varphi)^{1/2}} \cdot 0.9996; \quad \zeta = \frac{(e')^2}{2} \xi^2 \cos^2 \varphi$$

$$A_1 = \sin 2\varphi; \quad A_2 = A_1 \cdot \cos^2 \varphi$$

$$J_2 = \varphi + \frac{A_1}{2}; \quad J_4 = \frac{3J_2 + A_2}{4}; \quad J_6 = \frac{5J_4 + A_2 \cdot \cos^2 \varphi}{3}$$

$$\alpha = \frac{3}{4} (e')^2; \quad \beta = \frac{5}{3} \alpha^2; \quad \gamma = \frac{35}{27} \alpha^3$$

$$B_\varphi = 0.9996 \cdot c \cdot (\varphi - \alpha \cdot J_2 + \beta \cdot J_4 - \gamma \cdot J_6)$$

**Inverse:**

$$\begin{cases} \varphi = \varphi' + \left[ 1 + (e')^2 \cos^2 \varphi' - \frac{3}{2} (e')^2 \sin \varphi' \cdot \cos \varphi' (\tau - \varphi') \right] (\tau - \varphi') \\ \Delta\lambda = \operatorname{arctg} \frac{\sinh \xi}{\cos \eta} \end{cases}$$

dove

$$\varphi' = \frac{x}{6366197.724 \cdot 0.9996}; \quad v = \frac{c}{(1 + (e')^2 \cos^2 \varphi')^{1/2}} \cdot 0.9996$$

$$a = \frac{y}{v}; \quad b = \frac{x - B_\varphi}{v}; \quad \zeta = \frac{(e')^2 a^2}{2} \cos^2 \varphi'; \quad \xi = a \left( 1 - \frac{\zeta}{3} \right)$$

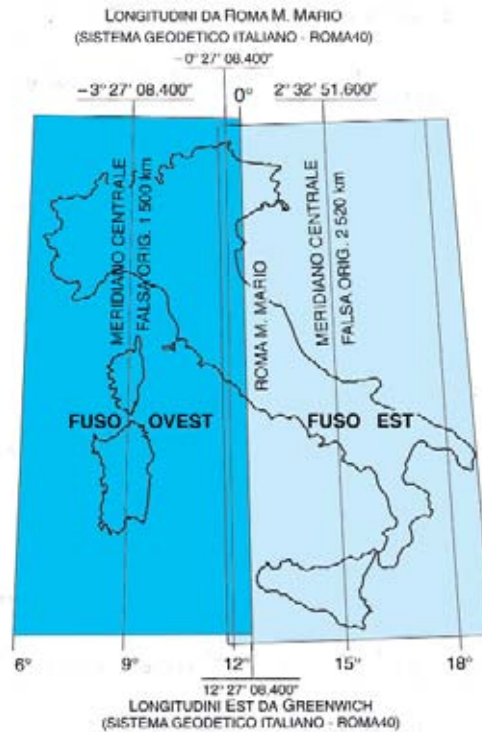
$$\eta = b (1 - \zeta) + \varphi'; \quad \tau = \operatorname{arctg} (\cos \Delta\lambda \cdot \operatorname{tg} \eta)$$

## IMPIEGO DELLA RAPPRESENTAZIONE DI GAUSS NEI SISTEMI CARTOGRAFICI NAZIONALE ED INTERNAZIONALE

### SISTEMA GEODETICO-CARTOGRAFICO NAZIONALE

In Italia la rappresentazione di Gauss è stata adottata nel 1948, applicandola al sistema geodetico nazionale Roma40, per la carta fondamentale d'Italia alla scala 1:25 000 e 1:100 000.

Tale sistema ha assunto il nome di «Gauss-Boaga» ed ha le caratteristiche di seguito elencate.



- Ampiezza dei fusi: 6°.
- Meridiani centrali dei fusi:  
 Ovest = -3° 27' 08.4"      Est = +2° 32' 51.6"
- Coefficiente di riduzione delle coordinate: 0.9996.
- False origini:  
 coordinate Nord =  $x$ ,    coordinate Est =  $y + y_0$

$$\text{con } y_0 = \begin{cases} 1500 \text{ km} & \text{per il fuso Ovest} \\ 2520 \text{ km} & \text{per il fuso Est.} \end{cases}$$

- Zona di sovrapposizione fra i due fusi: 30', tra -0° 30' e 0° 00' da Roma Monte Mario.
- Taglio geografico rispetto al meridiano di Roma M. Mario.

### SISTEMA GEODETICO-CARTOGRAFICO INTERNAZIONALE

Nel sistema internazionale la rappresentazione di Gauss prende il nome di UTM-Universal Transverse Mercator Projection (Proiezione di Mercatore Trasversa Universale) ed è impiegata per rappresentare l'intero globo con 60 fusi aventi sempre l'ampiezza di 6° e numerati da 1 a 60 in senso antiorario a partire dall'antimeridiano di Greenwich. Le longitudini dei meridiani centrali risultano così, -177°, -171°, ..., -3°, +3°, +9°, +15° ... +171°, +177°. In Europa l'UTM è stata applicata nel sistema geodetico ED50. I due fusi Ovest e Est del sistema nazionale hanno nell'UTM i numeri 32 e 33 (in realtà in questo sistema è necessario anche il fuso 34 per coprire la parte più a Est della penisola Salentina).

L'UTM ha le seguenti caratteristiche.

- Coefficiente di riduzione delle coordinate: 0.9996.
- False origini:  
 coordinate Nord =  $x + x_0$

$$\text{con } x_0 = \begin{cases} 0 & \text{per l'emisfero Nord} \\ 10\,000 \text{ km} & \text{per l'emisfero Sud} \end{cases}$$

$$\text{coordinate Est} = y + y_0 \\ \text{con } y_0 = 500 \text{ km per tutti i fusi.}$$

- Zona di sovrapposizione fra i fusi: 40' a cavallo del meridiano di separazione.
- Taglio geografico: rispetto al meridiano di Greenwich.

La rappresentazione UTM (ED50) è attualmente impiegata in Italia per la carta 1:50000, per il nuovo 1:25000 e per le carte tecniche 1:10000 e 1:5000.

CALCOLI GEODETICI SUL PIANO DI GAUSS

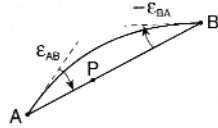
X = coordinata Nord  
 Y = coordinata Est  
 y = (coord. Est) - (falsa origine)

RIDUZIONE ALLA CORDA

Angolo di cui deve ruotare, in senso orario, la tangente alla trasformata per sovrapporsi alla corda.

$$\epsilon_{AB} = \frac{(2y_A + y_B)(X_A - X_B)}{6\rho N (0.9996)^2}$$

$$\epsilon^{cc} \approx \epsilon \cdot 636620 \quad \epsilon'' \approx \epsilon \cdot 206265$$



ρ ed N sono calcolati nel punto P, della corda AB, che dista da A 1/3 della lunghezza AB [X<sub>P</sub> = (2X<sub>A</sub> + X<sub>B</sub>)/3; Y<sub>P</sub> = (2Y<sub>A</sub> + Y<sub>B</sub>)/3]

CONVERGENZA DEL MERIDIANO

Nel punto P è l'azimut della parallela all'asse X in P.

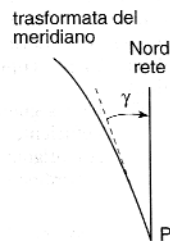
$$\gamma = \arctg \left( V \cdot \operatorname{tg} \xi \cdot \operatorname{tgh} \frac{y}{c \cdot 0.9996} \right)$$

$$\xi = \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos(V_1 \cdot \Delta\lambda)}$$

$$V = \sqrt{1 + (e')^2 \cos^2 \xi}$$

$$V_1 = \sqrt{1 + (e')^2 \cos^2 \varphi}$$

$$\gamma_{\text{appross.}} = \Delta\lambda \cdot \operatorname{sen} \varphi$$



MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE NELL'INTORNO DI UN PUNTO

Precisione alla 8<sup>a</sup> decimale

in coordinate geografiche

$$m = 0.9996 \left[ 1 + \frac{(\Delta\lambda)^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + (e')^2 \cos^2 \varphi) + \frac{(\Delta\lambda)^4}{24} \cos^4 \varphi (5 - 4 \operatorname{tg}^2 \varphi) \right]$$

in coordinate piane

$$m = 0.9996 \left( 1 + \frac{y^2}{2\rho N \cdot 0.9996^2} + \frac{y^4}{24\rho^2 N^2 \cdot 0.9996^4} \right)$$

Precisione alla 6<sup>a</sup> decimale

in coordinate geografiche

$$m = 0.9996 \left[ 1 + \frac{(\Delta\lambda)^2}{2} \cos^2 \varphi (1 + (e')^2 \cos^2 \varphi) \right]$$

in coordinate piane

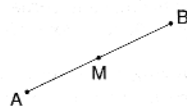
$$m = 0.9996 \left( 1 + \frac{y^2}{2\rho N \cdot 0.9996^2} \right)$$

MODULO DI DEFORMAZIONE LINEARE PER ELEMENTI FINITI

Distanza gaussiana = distanza ellissoidica ·  $\bar{m}$

per distanze di qualche centinaio di km

$$\bar{m} = \frac{1}{6 \left( \frac{1}{m_A} + \frac{4}{m_M} + \frac{1}{m_B} \right)}$$



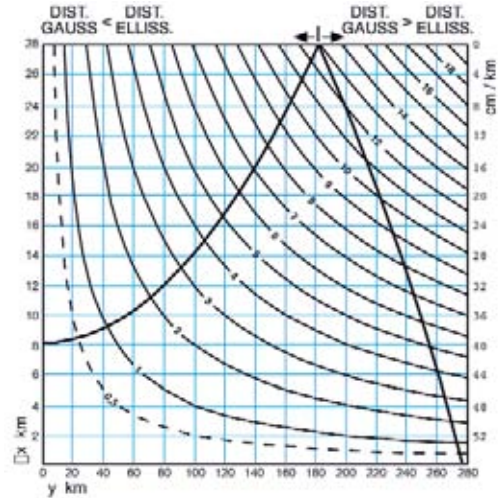
fino a 20 km

$$\bar{m} = 0.9996 \left( 1 + \frac{y_A^2 + y_A y_B + y_B^2}{6(\rho N)_M \cdot 0.9996^2} \right)$$

fino a 10 km

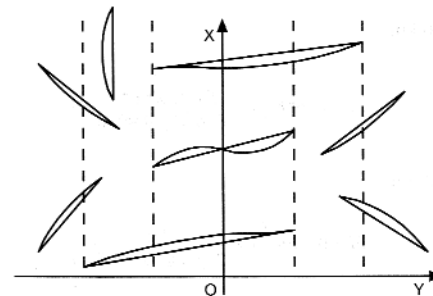
$$m = 0.9996 \left( 1 + \frac{y_M^2}{2(\rho N)_M \cdot 0.9996^2} \right)$$

GRAFICO PER IL CALCOLO APPROSSIMATO DELLA RIDUZIONE ALLA CORDA E DELLA DEFORMAZIONE LINEARE



esempi:  
 riduzione alla corda y = 100 km, Δx = 16 km : ε = 4"  
 deformazione lineare y = 80 km : 32 cm per km

FORMA DELLE TRASFORMATE DELLE GEODETICHE AL VARIARE DELLA POSIZIONE DEGLI ESTREMI - «REGOLA DEL VENTO»

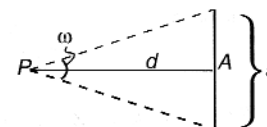


TOPOGRAFIA

MISURA INDIRECTA DELLE DISTANZE

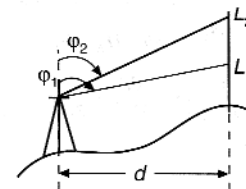
Stadia orizzontale

$$d = \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega}{2}$$



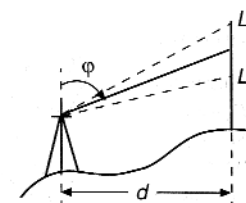
Stadia verticale ed angolo parallattico variabile

$$s = L_2 - L_1 \quad d = \frac{s}{\operatorname{ctg} \varphi_2 - \operatorname{ctg} \varphi_1} = \frac{s \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2}{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)}$$



Stadia verticale ed angolo parallattico costante (cannocchiale centralmente anallattico)

$$s = L_2 - L_1 \quad d = K s \operatorname{sen}^2 \varphi$$



RIDUZIONE ALL'ELLISSOIDE DI DISTANZE SPAZIALI MISURATE CON APPARATI ELETTRONICI O CON GPS

misurando la zenitale da A (punto di stazione) su P

$D_{AP}$  = dist. ellissoidica (geodetica);  $z_p$  = zenitale misurata da A su P;  
 $D_i$  = dist. inclinata;  $Z_p$  = zenitale vera da A su P;  
 $H_A$  = quota del centro strum. in A;  $K$  = coefficiente di rifrazione;  
 $R_\alpha$  = raggio della sez. norm.  $\Delta P$ ;

valori medi per l'Italia  $\left\{ \begin{array}{l} \text{nord} = 0.15 \\ \text{centro} = 0.13 \\ \text{sud} = 0.11 \end{array} \right.$

$$\omega = \frac{D_i \sin z_p}{2R_\alpha} \quad \delta = K\omega \quad Z_p = z_p + \delta - \omega$$

$$D_{AP} = D_i \left( 1 - \frac{H_A}{R_\alpha} \right) (\sin Z_p - \cos Z_p \cdot \text{tg} \omega)$$

conoscendo le quote di A e P

$H_p$  = quota del centro dei prismi retroriflettori

$$h = \frac{H_A + H_p}{2} \quad \Delta h = H_A - H_p$$

$$C = \left( 1 - \frac{h}{R_\alpha} \right) \left( 1 - \frac{\Delta h^2}{2D_i^2} - \frac{\Delta h^4}{8D_i^4} + \frac{D_i^2}{24R_\alpha^2} \right)$$

$$D_{AP} = D_i \cdot C$$

RIDUZIONE AL CENTRO TRIGONOMETRICO

$y$  = (direzione al punto) - (direzione al centro)

$$r = \text{eccentricità} \quad D = \text{distanza} \quad \varepsilon = \arcsen \frac{r \cdot \text{sen } y}{D}$$

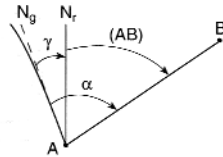
CALCOLO DELL'ANOMALIA (AB)

$\alpha$  = azimut ellissoidico

$$\text{tg}(AB) = \frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}$$

$$(BA) = (AB) \pm \pi$$

anomalia = azimut -  $\gamma$



$$\frac{AB}{\text{sen}(AB)} = \frac{E_B - E_A}{\cos(AB)} = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2}$$

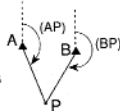
TRASPORTO POLARE DA A A P

$$E_p = E_A + AP \text{sen}(AP) \quad N_p = N_A + AP \cos(AP)$$

INTERSEZIONE DIRETTA DEL PUNTO P DA A E B

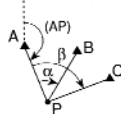
$$N_p = \frac{N_A \text{tg}(AP) - N_B \text{tg}(BP) + E_B - E_A}{\text{tg}(AP) - \text{tg}(BP)}$$

$$E_p = (N_p - N_A) \text{tg}(AP) + E_A = (N_p - N_B) \text{tg}(BP) + E_B$$



INTERSEZIONE INVERSA DEL PUNTO P DA A, B E C, MISURANDO GLI ANGOLI

$$\alpha = A\hat{P}B \quad \beta = A\hat{P}C$$



$$\text{tg}(AP) = \frac{-E_A (\text{ctg} \alpha - \text{ctg} \beta) + E_B \text{ctg} \alpha - E_C \text{ctg} \beta + N_C - N_B}{-N_A (\text{ctg} \alpha - \text{ctg} \beta) + N_B \text{ctg} \alpha - N_C \text{ctg} \beta + E_B - E_C}$$

$$(BP) = (AP) + \alpha \pm \pi \quad E_p, N_p: \text{ vedi Intersezione diretta}$$

LIVELLAZIONE TRIGONOMETRICA

$D$  = distanza ellissoidica AP  $H_A$  = quota di A

$z_{AP}$  = zenitale da A su P  $H_p$  = quota di P

$\Delta I$  = altezza del centro strumentale sul piano di riferimento altimetrico (piano di paragone) di A

$\Delta M$  = altezza del punto collimato sul piano di paragone di P

$$K = \text{coefficiente di rifrazione}; \quad \beta = \frac{1-K}{2R} (\approx 6.82 \cdot 10^{-8})$$

$$\Delta_{AP} = D \text{ctg} z_{AP} + \frac{\beta D^2}{\text{sen}^2 z_{AP}} + \frac{H_p^2 - H_A^2}{2R} + \Delta I - \Delta M$$

## TELERILEVAMENTO

APPARATI DI SCANSIONE SATELLITARE

SATELLITE «LANDSAT»

Orbita: Eliosincrona quasi polare

Quota media: 705 km

Copertura strisciata: 185 x 185 km

Banda spettrale	Finestra spettrale [micro-m]	IFOV [micro-r]	FOV [m]	Pixel [m]
PAN	0.522 - 0.90	18.5 · 21.3	13 · 15	15
1	0.45 - 0.52	42.6	30	30
2	0.52 - 0.60	42.6	30	30
3	0.63 - 0.69	42.6	30	30
4	0.76 - 0.90	42.6	30	30
5	1.55 - 1.75	42.6	30	30
6	10.4 - 12.5	85.2	30	60
7	2.08 - 2.35	42.6	30	30

SATELLITE «SPOT 5»

Orbita: Circolare, quasi polare

Quota media: 830 km

Immagine: 8 bit

Sensori: 12000 in linea

Modalità ripresa: normale (n)/alta risoluzione (hr)

Ampiezza scena: 60 km

Sensore/bande	Finestra spettrale [micro-m]	Dimensione pixel [m]
PAN-1 (n)	0.51 - 0.73	5
PAN-1 (hr)	0.51 - 0.73	2.5
MS-1	0.5 - 0.59	10
MS-2	0.61 - 0.68	10
MS-3	0.79 - 0.89	10
SWIR	1.58 - 1.75	20

SATELLITE «EROS»

Orbita: Circolare Polare

Quota media: 480 km

Sensori: 7800 in linea

Banda spettrale	Finestra spettrale [micro-m]	Pixel [m]
PAN	0.5 - 0.9	1.8

SATELLITE «QUICKBIRD»

Data lancio: 18/10/2001

Immagine: 11 bit

Quota media: 450 km

Orbita: Eliosincrona

Dimensione scena 16.5 x 16.5 km al Nadir.

Banda spettrale	Finestra spettrale [micro-m]	Pixel [m]
PAN	0.44 - 0.9	0.61
MS (Bluc)	0.45 - 0.52	2.44
MS (green)	0.52 - 0.6	2.44
MS (red)	0.63 - 0.69	2.44
IR vicino	0.76 - 0.9	2.44

SATELLITE «IKONOS 2»

Data lancio: 24/9/1999

Orbita: Quasi polare ed eliosincrona

Immagine: 11 bit

Quota: 681 km

Sensore/bande	Finestra spettrale [micro-m]	Dimensione pixel [m]	Ampiezza scena [km]
PAN-1	0.45 - 0.9	1	11
MS-1	0.45 - 0.53	4	111
MS-2	0.52 - 0.61	4	111
MS-3	0.64 - 0.72	4	111
IR-4	0.77 - 0.88	4	111

APPARATI DI SCANSIONE AVIONICA

DAEDALUS AADS1268

Campo di vista (FOV): 85.92° (716 pixel/linea di scansione)  
 Campo di vista elementare (IFOV): 2.5 mrad

Sensore ATM

Canale	Intervallo spettrale [micron]
1	0.42-0.45
2	0.45-0.52
3	0.52-0.60
4	0.60-0.62
5	0.63-0.69
6	0.69-0.75
7	0.76-0.90
8	0.91-1.05
9	1.55-1.75
10	2.08-2.35
11 (termico)	8.50-13.00
12 (termico)	8.50-13.00

Sensore TIMS (termico)

Canale	Intervallo spettrale [micron]
1	8.20-8.60
2	8.60-9.00
3	9.00-9.40
4	9.40-10.2
5	10.2-11.2
6	11.2-12.6

Campo di vista (FOV): 72° (755 pixel/linea di scansione)  
 Campo di vista elementare (IFOV): 2.0 mrad

Sensore MIVIS

Canale	Intervallo spettrale [micron]
102 (registrati dai 4 spettrometri)	20 canali (0.43-0.85) 8 canali (1.15-1.55) 64 canali (2-2.5) 10 canali (8.2-12.7)

GALILEO VIRS

Campo di vista (FOV): 40° (512 pixel/linea di scansione)  
 Campo di vista elementare (IFOV): 1.5 mrad

Sensore VIRS-200

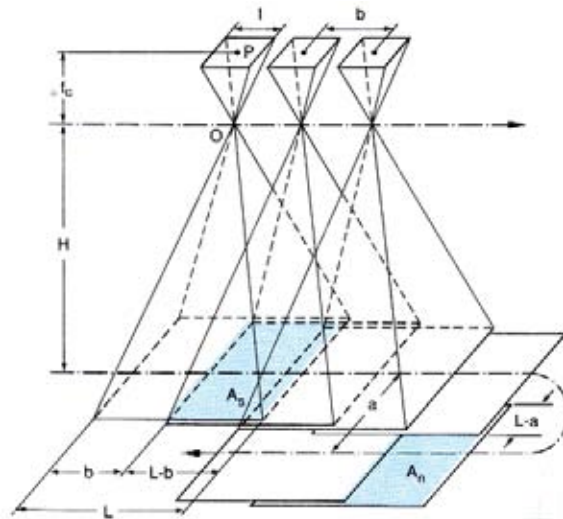
Canali	Intervallo spettrale [micron]
20 programmabili su 240 disponibili	(0.4-1.0)

Sensore VIRS-201

Canali	Intervallo spettrale [micron]
20 programmabili su 240 disponibili	(0.4-1.0) (8-12)

FOTOGRAMMETRIA

- O = Centro di presa
- P = Punto principale
- l = Lato fotogramma
- L = Abbracciamento
- H = Quota di volo relativa
- $f_c$  = Distanza principale calibrata
- $S_c$  = Denominatore della scala della carta
- $S_f$  = Denominatore della scala media del fotogramma
- a = Interasse fra le strisciate con ricoprimento laterale q%  
 $a = L (1 - q/100)$
- b = Lungh. della base di presa con ricoprimento longitudinale p%  
 $b = L (1 - p/100)$
- $A_f$  = Superficie coperta da un fotogramma  $A_f = L^2$
- $A_s$  = Superficie stereoscopica  $A_s = (L - b) \cdot L$
- $A_n$  = Superficie stereoscopica utile
- n = Numero dei fotogrammi necessari per coprire 10000 ha



$S_f$	L [m]	b [m] (p = 60%)	a [m] (q = 30%)	$A_f$ [km <sup>2</sup> ]	$A_s$ [km <sup>2</sup> ]	n	H [km]	
							$f_c$ [mm] =	
							153	305
3000	690	275	485	0.48	0.29	750	0.46	0.91
4000	920	370	645	0.85	0.51	422	0.61	1.22
5000	1150	460	805	1.32	0.79	270	0.77	1.52
6000	1380	550	965	1.90	1.14	188	0.92	1.83
7000	1610	645	1125	2.59	1.56	138	1.07	2.13
8000	1840	735	1290	3.39	2.03	105	1.22	2.44
9000	2070	830	1450	4.28	2.57	83	1.38	2.74
10000	2300	920	1610	5.29	3.17	68	1.53	3.05
11000	2530	1010	1770	6.40	3.84	56	1.68	3.35
12000	2760	1105	1930	7.62	4.57	47	1.84	3.66
13000	2990	1195	2095	8.94	5.36	40	1.99	3.97
14000	3220	1290	2255	10.37	6.22	34	2.14	4.27
15000	3450	1380	2415	11.90	7.14	30	2.29	4.57
16000	3680	1470	2575	13.54	8.13	26	2.45	4.88
17000	3910	1565	2735	15.29	9.17	23	2.60	5.19
18000	4140	1655	2900	17.14	10.28	21	2.75	5.49
19000	4370	1750	3060	19.10	11.46	19	2.91	5.79
20000	4600	1840	3220	21.16	12.70	17	3.06	6.10
21000	4830	1930	3380	23.33	14	15	3.21	6.40
22000	5060	2025	3540	25.60	15.36	14	3.37	6.71
23000	5290	2115	3705	27.98	16.79	13	3.52	7.02
24000	5520	2210	3865	30.47	18.28	12	3.67	7.32
25000	5750	2300	4025	33	20	10.8	3.83	7.62
26000	5980	2390	4185	36	21	10	3.98	7.93
27000	6210	2485	4345	39	23	9.3	4.13	8.24
28000	6440	2575	4510	41	25	8.6	4.28	8.54
29000	6670	2670	4670	44	27	8	4.44	8.85
30000	6900	2760	4830	48	29	7.5	4.59	9.15
35000	8050	3220	5635	65	39	5.5	5.35	10.68
40000	9200	3680	6440	85	51	4.2	6.12	12.20
45000	10350	4140	7245	107	64	3.3	6.89	13.73
50000	11500	4600	8050	132	79	2.7	7.65	15.25
60000	13800	5520	9660	190	114	1.9	9.18	18.30
70000	16100	6440	11270	259	156	1.4	10.71	21.35
80000	18400	7360	12880	339	203	1.1	12.24	24.40

N.B.: i dati sopra riportati sono calcolati assumendo  $l = 23$  cm per il fotogramma.

TAB. PER LA DETERMINAZIONE DELL'ALTEZZA DEL SOLE NELL'ITALIA CENTRO-SETTENTRIONALE (IN GRADI SESSAGESIMALI) -  $\varphi = 44^\circ$

Orc	7.00	7.30	8.00	8.30	9.00	9.30	10.00	10.30	11.00	11.30	12.00
Data	17.00	16.30	16.00	15.30	15.00	14.30	14.00	13.30	13.00	12.30	12.00
21/12	-	-	3	7	11	14	17	19	21	22	25
6/12-7/1	-	-	3	8	12	15	18	20	22	23	24
21/11-22/1	-	2	5	10	14	18	20	23	25	26	26
5/11-7/2	-	4	9	13	18	21	24	27	29	30	31
21/10-22/2	3	8	13	17	22	26	29	31	34	35	36
8/10-8/3	7	12	17	22	27	30	34	37	39	40	41
22/9-23/3	11	16	21	26	31	35	39	42	44	46	47
7/9-7/4	16	20	26	30	36	42	44	48	50	52	52
22/8-22/4	19	25	30	35	40	45	49	53	55	57	58
7/8-7/5	22	28	33	38	43	48	53	57	60	62	63
22/7-23/5	24	30	36	40	46	51	56	60	63	65	66
7/7-7/6	26	31	37	42	47	52	57	61	65	68	69
21/6	26	32	37	43	48	53	58	62	66	69	69

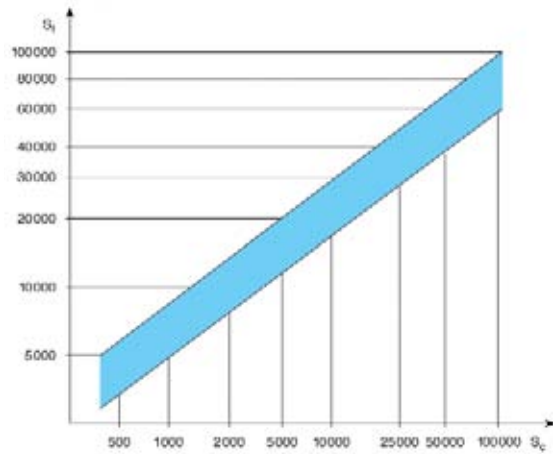
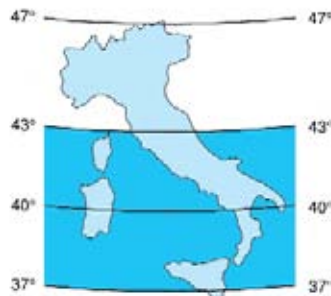
Es.: l'altezza del sole il 7 settembre alle ore 11 è di  $50^\circ$ ; il 15 settembre alle ore 15.30 è di  $28^\circ$ .



TAB. PER LA DETERMINAZIONE DELL'ALTEZZA DEL SOLE NELL'ITALIA CENTRO-MERIDIONALE (IN GRADI SESSAGESIMALI) -  $\varphi = 40^\circ$

Orc	7.00	7.30	8.00	8.30	9.00	9.30	10.00	10.30	11.00	11.30	12.00
Data	17.00	16.30	16.00	15.30	15.00	14.30	14.00	13.30	13.00	12.30	12.00
21/12	-	1	6	10	14	18	21	23	25	26	27
6/12-7/1	-	1	6	11	15	18	22	24	26	27	28
21/11-22/1	-	3	8	13	17	21	24	27	29	30	30
5/11-7/2	1	6	11	16	21	24	28	31	33	34	35
21/10-22/2	4	10	15	20	25	29	32	35	38	39	40
8/10-8/3	8	14	19	24	29	33	37	40	43	44	45
22/9-23/3	12	17	23	28	33	38	42	46	48	50	51
7/9-7/4	16	21	27	32	38	43	47	51	54	56	56
22/8-22/4	19	25	31	36	42	47	51	56	59	61	62
7/8-7/5	22	28	33	39	45	50	55	60	63	66	67
22/7-23/5	24	30	36	41	47	53	58	63	67	69	70
7/7-7/6	26	31	37	43	48	54	59	64	69	72	73
21/6	26	32	37	43	49	54	60	65	69	72	73

Es.: l'altezza del sole il 5 novembre alle ore 10.30 è di  $31^\circ$ ; il 28 marzo alle ore 11 è di  $50^\circ$ .



## TEORIA DEGLI ERRORI

- Media  $M(x)$  di una grandezza  $x$  (misurata  $n$  volte con ugual precisione)

$$M(x) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

- Errore (quadratico) medio  $m_0$  ( $\sigma_0$ ) di  $x$  (misurata  $n$  volte con ugual precisione)

$$m_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^2}{n-1}}$$

- Errore medio  $m$  ( $\sigma$ ) della media di  $x$  (misurata  $n$  volte con ugual precisione)

$$m = \pm \frac{m_0}{\sqrt{n}}$$

- Peso  $p_i$  della misura  $i$ -esima, caratterizzata dall'errore quadratico medio  $m_i$ , della grandezza  $x$  ( $i = 1, \dots, n$ )

$$p_i = \frac{m_0^2}{m_i^2}$$

( $m_0$  = grandezza arbitraria omogenea con le  $m_i$ ).

- Media ponderata  $M_p(x)$  di una grandezza  $x$  (misurata  $n$  volte con diversa precisione)

$$M_p(x) = \frac{\sum_{i=1}^n p_i x_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

- Errore (quadratico) medio  $m_{0p}$  di  $x$  (misurata  $n$  volte con diversa precisione)

$$m_{0p} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i [x_i - M_p(x)]^2}{n-1}}$$

- Errore medio  $m_p$  della media di  $x$  (misurata  $n$  volte con diversa precisione)

$$m_p = \pm \frac{m_{0p}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

- Soluzione ai *minimi quadrati* del sistema lineare (in forma matriciale)

$$Ax + b = v$$

costituito da  $m$  equazioni generate (provenienti ciascuna da una misura indiretta, eseguita con precisione costante, di tutte le  $n$  quantità incognite  $x_1, x_2, \dots, x_n, n < m$ ).

- $A$  = matrice  $n \times m$  dei coefficienti;
- ${}^t A$  = matrice trasposta di  $A$ ;
- $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$  : parametri incogniti;
- $b = {}^t(b_1, \dots, b_m)$  : termini noti;
- $v = {}^t(v_1, \dots, v_m)$  : errori.

Soluzione

$$\hat{x} = ({}^tA \cdot A)^{-1} \cdot {}^tA b$$

Errore medio dell'unità di peso

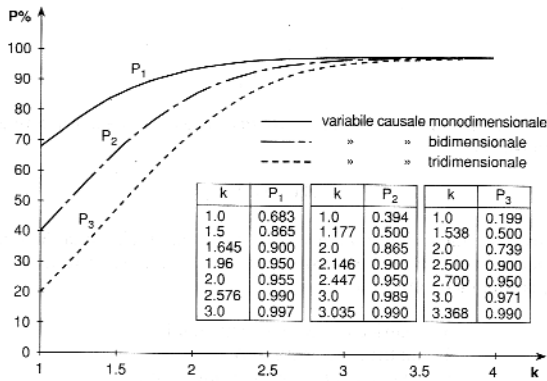
$$\sigma_0 = \pm \sqrt{\frac{{}^t(A\hat{x} + b)(A\hat{x} + b)}{m - n}}$$

Errore medio  $m_i$  dell'incognita  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )

$$m_i = \pm \sigma_0 \sqrt{d_{ii}}$$

( $d_{ii}$  =  $i$ -esimo elemento della diagonale principale della matrice inversa  $({}^tA A)^{-1}$ ).

PROBABILITÀ CHE IL VALORE DI  $x$  SIA COMPRESO NELL'INTERVALLO  $(M - k\sigma, M + k\sigma)$



$$P_{(M-k\sigma, M+k\sigma)}$$

ALCUNI DATI E FORMULE UTILI

$$\pi \approx 3.14159 \ 26535 \ 89793 \ 23846 \ 26433 \ 83279 \ 50288 \ 41971$$

$$e \approx 2.7182818285$$

$$1 \text{ radiante} = 57^\circ 17' 44.81'' = 206264.81'' = 63.661977^\circ = 636619.77''$$

$$1'' = 0.1 \text{ mgon} = 0.32''$$

$$10'' = 1 \text{ mgon} = 3.24''$$

$$1^\circ = 10 \text{ mgon} = 32.40''$$

$$10^\circ = 10^2 \text{ mgon} = 5'24''$$

$$1^\circ = 10^3 \text{ mgon} = 54'$$

$$10^\circ = 10^4 \text{ mgon} = 9^\circ$$

$$\text{gradi centesimali} = \text{gradi sessadecimali} \times 10/9$$

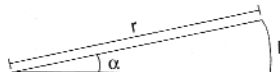
$$\text{gradi sessadecimali} = \text{gradi centesimali} \times 9/10$$

LUNGHEZZA DI ARCHI SOTTESI DA PICCOLI ANGOLI

$$l = r \cdot \alpha$$

$$\alpha = l/r$$

con  $\alpha$  in rad



r	$\alpha$	1"	10"	1'	1 <sup>cc</sup>	10 <sup>cc</sup>	1 <sup>c</sup>
		[mm]	[mm]	[mm]	(0.1mgon)	(1mgon)	(10 mgon)
1 m		-	-	0.3	-	-	0.2
5 m		-	0.2	1.5	-	0.1	0.8
10 m		-	0.5	2.9	-	0.2	1.6
50 m		0.2	2.4	14.5	0.1	0.8	7.9
100 m		0.5	4.8	29.1	0.2	1.6	15.7
500 m		2.4	24.2	145.4	0.8	7.9	78.5
1 km		4.8	48.5	290.9	1.6	15.7	157.1
5 km		24.2	242.4	1454.4	7.6	78.5	785.4
10 km		48.2	484.8	2908.9	15.5	157.1	1570.8
50 km		242.4	2424.1	14544.4	77.6	785.4	7854.0

TRIANGOLO PIANO

RETTANGOLO

$$\beta + \gamma = \pi/2$$

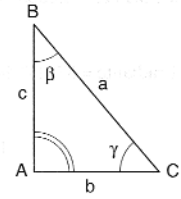
$$b = a \cdot \text{sen } \beta = a \cdot \text{cos } \gamma = c \cdot \text{tg } \beta = c \cdot \text{ctg } \gamma$$

$$c = a \cdot \text{sen } \gamma = a \cdot \text{cos } \beta = b \cdot \text{tg } \gamma = b \cdot \text{ctg } \beta$$

$$a = b/\text{sen } \beta = c/\text{cos } \beta = c/\text{sen } \gamma = b/\text{cos } \gamma$$

$$\text{sen } \beta = b/a \quad \text{cos } \beta = c/a \quad \text{tg } \beta = b/c$$

$$\text{sen } \gamma = c/a \quad \text{cos } \gamma = b/a \quad \text{tg } \gamma = c/b$$



QUALSIASI

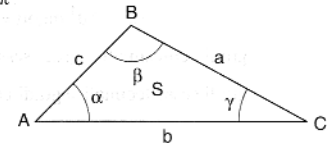
$$a + b + c = 2p \quad \alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \text{cos } \alpha$$

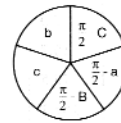
$$\text{tg } \alpha = \frac{a \cdot \text{sen } \gamma}{b - a \cdot \text{cos } \gamma} \quad \text{tg } \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$S = \frac{1}{2} ab \text{sen } \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

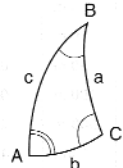


TRIANGOLO SPERICO

RETTANGOLO



Secondo lo schema di sinistra, il seno di un elemento è uguale al prodotto delle tangenti dei due elementi adiacenti, o al prodotto dei coseni degli altri due;



$$\text{es.: } \text{sen } b = \text{tg } (\pi/2 - C) \cdot \text{tg } c = \text{ctg } C \cdot \text{tg } c$$

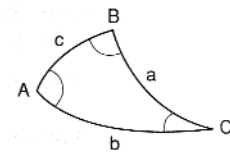
$$\text{sen } b = \text{cos } (\pi/2 - a) \cdot \text{cos } (\pi/2 - B) = \text{sen } a \cdot \text{sen } B$$

QUALSIASI

$$\frac{\text{sen } a}{\text{sen } A} = \frac{\text{sen } b}{\text{sen } B} = \frac{\text{sen } c}{\text{sen } C}$$

$$\text{cos } a = \text{cos } b \text{cos } c + \text{sen } b \text{sen } c \text{cos } A$$

$$\text{sen } A \text{ctg } B = \text{ctg } b \text{sen } c - \text{cos } c \text{cos } A$$



SVILUPPI IN SERIE

$$\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 \mp \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$\text{cos } x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

$$\text{tg } x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

FUNZIONI IPERBOLICHE

$$\text{senh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{arcsenh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\text{cosh } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{arccosh } x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\text{tgh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{arctgh } x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

FORMULE DI ADDIZIONE DEGLI ARCHI

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}$$

FORMULE DI SOTTRAZIONE DEGLI ARCHI

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \\ \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \\ \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}$$

FORMULE DI DUPLICAZIONE DEGLI ARCHI

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2 \operatorname{ctg}\alpha} \end{aligned}$$

FORMULE DI BISEZIONE DEGLI ARCHI

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}\alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \\ \cos \frac{1}{2}\alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \\ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \\ \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\alpha &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{1 - \cos\alpha}} \end{aligned}$$

PREFISSI PER MULTIPLI E SOTTOMULTIPLI

yotta	Y	10 <sup>24</sup>	deci	d	10 <sup>-1</sup>
zetta	Z	10 <sup>21</sup>	centi	c	10 <sup>-2</sup>
exa	E	10 <sup>18</sup>	milli	m	10 <sup>-3</sup>
peta	P	10 <sup>15</sup>	micro	μ	10 <sup>-6</sup>
tera	T	10 <sup>12</sup>	nano	n	10 <sup>-9</sup>
giga	G	10 <sup>9</sup>	pico	p	10 <sup>-12</sup>
mega	M	10 <sup>6</sup>	femto	f	10 <sup>-15</sup>
chilo	k	10 <sup>3</sup>	atto	a	10 <sup>-18</sup>
etto	h	10 <sup>2</sup>	zepto	z	10 <sup>-21</sup>
deca	da	10 <sup>1</sup>	yocto	y	10 <sup>-24</sup>

ALCUNE UNITÀ DI MISURA

Ara		100 m <sup>2</sup>
Ettaro (ha)	100 are	10000 m <sup>2</sup>
km <sup>2</sup>	100 ha	10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>
Miglio geografico	1' sull'equatore	1853.2 m
Miglio nautico		1852 m
Pollice (inch)		2.54 cm
Piede (foot)	12 pollici	30.48 cm
Yarda (Yd)	3 piedi	0.9144 m
Miglio terrestre	5280 piedi	1609.3 m

$$\begin{aligned} 1 \text{ mm di Hg} &= 1.33333 \text{ millibar} \\ 1 \text{ millibar} &= 0.75 \text{ mm di Hg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ^\circ\text{C} &= \text{gradi Centigradi} & ^\circ\text{F} &= \text{gradi Fahrenheit} \\ ^\circ\text{C} &= (^\circ\text{F} - 32) \frac{5}{9} & ^\circ\text{F} &= \frac{9}{5} ^\circ\text{C} + 32 \end{aligned}$$

LA TERRA

massa	5.976 · 10 <sup>24</sup> kg
lunghezza di 1/4 di meridiano (Hayford)	10002288.30 m
circonferenza dell'equatore (Hayford)	40076593.77 m
densità media	5.522 g/cm <sup>3</sup>
accel. di gravità a 45° latitud. sul livello mare	9.80665 m/s <sup>2</sup>
costante gravitaz. universale	G = 6.6720 · 10 <sup>-11</sup> Nm <sup>2</sup> kg <sup>-2</sup>
velocità orbitale media	29770 m/s
velocità angolare media	7.29 · 10 <sup>-5</sup> rad/s
atmosfera campione	1013 hPa = 1013 mbar = 760 mm Hg
velocità della luce nel vuoto	2.9979 · 10 <sup>8</sup> m/s

